

Damer Tufaile

Engenheiro Civil pela Escola de Engenharia da Universidade Mackenzie

Algoritmo hipercircular

Resumo

Baseado em quatro artigos anteriores de nossa autoria publicados no blog DNI, apresentamos um estudo que visa obter valores da relação ótima k derivada indiretamente das quantidades de cálculo processadas pelos algoritmos hiperbólico e circular de modo que o somatório da quantidade total de cálculo de um conjunto de amostras de produtos de dois primos, convenientemente definidas, seja tal que resulte na obtenção de um mínimo dos mínimos do somatório das quantidades de cálculo destes dois algoritmos.

Introdução

Caso não esteja familiarizado com o assunto em pauta recomendamos a leitura dos textos [1] que compõem a bibliografia do presente artigo.

Ao final do artigo anterior “intitulado “*Algoritmo circular*”, ao raciocinarmos em termos de algoritmo hiperbólico, afirmávamos que quando o número a ser decomposto fosse primo o limite para variação de x nos testes corresponderia a $x_{\max}=C^{1/2}$; que a quantidade de cálculo seria máxima, e ainda, que para relações x/z próximas de zero a quantidade de cálculo seria pequena e cresceria gradualmente à medida que x variasse até o ponto (como vimos no exemplo numérico do problema proposto por Sgarro [2]) onde seria mais vantajoso o uso do algoritmo circular. Assim,, haveria um momento onde a variação de x passaria por um valor x' menor que x_{\max} .

Considerámos a existência de um k definido como a relação entre x_{\max} e x' tal que o valor de x' deveria ser $x' = C^{1/2}/k$ com $k > 1$.

1 Esquema do algoritmo hipercircular

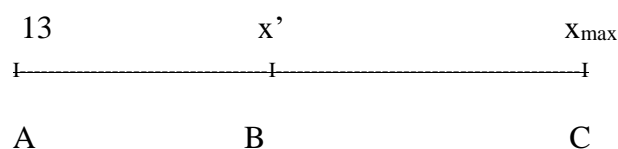


Figura 1

No segmento de reta ABC da figura 1 representamos esquematicamente o funcionamento do algoritmo hipercircular. **Tenha presente** que utilizamos o software DNI para a elaboração dos cálculos. O ponto B correspondente a x' é um divisor de domínios. O domínio de atuação do algoritmo hiperbólico corresponde ao intervalo AB, ou seja, x variando crescentemente entre o primo 13 (1º balizador da SNPEFP₁₁ utilizada no software DNI) e $x'=C^{1/2}/k$ onde $C=x*z$ (respectivamente inteiro menor e maior a serem determinados) e k uma constante previamente definida.

Já o domínio do algoritmo circular corresponde ao intervalo CB e x varia eventual e decrescentemente de x_{\max} até x' onde x é calculado em função da variação diametral a partir de um D_{\min} arredondado para cima em concordância com as terminações unitárias e decenárias numéricas e as unitárias e decenárias diametraes.

Como não se sabe aonde a solução do problema se dará tanto faz começar os cálculos por qualquer um dos algoritmos. Nossos estudos basearam-se no software DNI que adotou para começo dos cálculos o algoritmo circular. Sendo assim, os cálculos sempre começam pelo algoritmo circular que comanda e atua como ator principal e o algoritmo hiperbólico como ator coadjuvante. Para cada um dos algoritmos são duas as condições para **interrupção** dos cálculos:

Algoritmo circular: Calcule x até encontrar valores inteiros para x e z ou em caso contrário até quando x for menor que x' .

Ocorrendo a 1ª condição o problema fica resolvido e os inteiros obtidos deverão ser testados quanto à primalidade. Ocorrendo a 2ª condição entra em ação o algoritmo hiperbólico.

Algoritmo hiperbólico: Calcule z utilizando a SNPEFP₁₁ a partir do 1º balizador (13) até encontrar valores inteiros para x e z ou em caso contrário até quando x for menor que x' . Ocorrendo a primeira condição o problema fica resolvido. Ocorrendo a 2ª condição conclui-se que o número a ser decomposto é primo.

Observe que, quando inteiros não são encontrados, a variável x percorre todo o intervalo de variação AC. Mais à frente apresentaremos um **roteiro básico** e mais completo do algoritmo hipercircular.

2 Critérios para definição do conjunto de produtos $C=x*z$

Para elaborar a pesquisa de k ótimo, à semelhança com o ocorrido no problema proposto por Sgarro [2], é necessário que se crie um conjunto de produtos $C=x*z$. Para a consecução deste objetivo partiu-se das **premissas** de que próximo ao valor C a ser decomposto existe um conjunto de produtos cujos valores tenham a **mesma ordem de grandeza** de C e ainda, que seus valores sejam tais que as relação x/z dos primos que geram esses produtos se distribua de forma **aproximadamente uniforme** de modo a representar com razoável precisão as relações x/z existentes no intervalo analisado.

Também, de forma aproximada, admitiu-se que os resultados obtidos para o conjunto estudado possa ser estendido a conjuntos com número de dígitos **menores ou maiores** desde que obedeçam as premissas acima citadas. Para corroborar **esta premissa** desenvolvemos para $k_{3,7}$ um estudo similar ao elaborado para 15 dígitos conforme indicado na tabela 5 com amostras de produtos $C=x*z$ contendo somente 8 dígitos. Mais à frente faremos comentários a respeito dos resultados encontrados.

Qual seria a quantidade ideal de dígitos a ser adotada para os produtos C ? É claro que quanto maior for a quantidade dígitos mais precisos deverão ser os resultados. Temos porem, uma limitação ligada ao **default** (valor padrão) dos PCs comumente comercializados. É de 15 a quantidade máxima de dígitos que pode ser utilizada para que haja garantia que os resultados dos cálculos vão estar corretos, isto é, as operações que excederem $C'=999.999.999.999.999$ poderão apresentar resultados eventualmente imprecisos. Sendo assim, buscando a precisão possível que os PCs oferecem, adotamos como **critério** para definir os produtos C números que tenham ordens de grandeza $C'=999.999.999.999.999$.

Lembramos que o intuito principal desta pesquisa é o de resolver com eficiência o **problema básico** da decomposição do produto de dois números primos. Por esta razão, adotamos, para criar o conjunto de produtos C a ser utilizado na pesquisa de k , o **critério** de usar como valores de x e z somente números primos.

Observamos, devido à natureza da pesquisa realizada, que não se deve esperar **precisão absoluta** nos resultados.

Vejamos como proceder para obter x e z com terminações numéricas unitárias, por exemplo, em 3 e 7 de forma que o produto C seja o mais próximo possível de $C' = 999.999.999.999.999$. Suponha que tenhamos a relação $x'/z' = 0,43$ onde x' e z' são valores provisórios que irão permitir a determinação de x e z . Provisoriamente, calculamos valores x' e z' tal que $C' = x' * z'$. Como $x'/z' = 0,43$ então $x' = 0,43z'$. Substituindo x' em $C' = x' * z'$ resulta $C' = 0,43 * z'^2$ donde $z' = (C'/0,43)^{1/2}$ onde substituindo $C' = 999.999.999.999.999$ obtemos $z' = 48.224.282$.

Para determinar o valor definitivo de z utilizamos o software DECO que fornece a lista de primos contidos num dado intervalo, No caso em pauta adotamos o intervalo situado entre 48.224.182 e 48.224.282. O software DECO fornece os seguintes primos dentro deste intervalo: 48.224.203; 48.224.213; 48.224.227; 48.224.233; 48.224.237 e 48.224.279. Como o primo z deve terminar em 3 ou 7 escolhemos o penúltimo primo que corresponde ao maior primo entre os primos terminados em 3 ou 7, isto é, $z = 48.224.237$.

Em seguida calculamos $x' = 0,43 * z = 0,43 * 48.224.237$ portanto $x' = 20.736.422$.

Adotando o intervalo situado entre 20.736.322 e 20.736.422 obtemos pelo software DECO os seguintes primos: 20.736.323; 20.736.337; 20.736.347; 20.736.349; 20.736.367 e 20.736.407.

Como o primo x deve terminar em 3 escolhemos o 1º valor da série que é o único com a terminação requerida. Portanto $x = 20.736.323$. Logo $C = x * z = 20.736.323 * 48.224.237$ $C' = 999.993.354.860.551$ e $x/z = 0,429997949$ cujo valor é próximo de 0,43.

Observe que neste exemplo aparece a questão acima aludida relativa à precisão absoluta nos cálculos. Muitas vezes é necessário refazer os cálculos com vistas a obter um resultado em que a relação x/z se aproxime ainda mais de $x/z = 0,43$ isto porque, neste exemplo dado, o valor de x adotado é o 1º da série de primos obtidos. O ideal seria que ele também fosse o último da série. Tenha também presente que a relação entre dois primos, exceto quando eles são iguais, o resultado é um número irracional, isto é no caso, não há, por mais que aproximemos os cálculos, dois primos cuja relação x/z resulte exatamente em 0,43. Em virtude desta impossibilidade, procuramos obter dois primos cuja relação fosse a mais próxima possível de uma dada relação x/z decimal fracionária de dois dígitos.

Outra questão se refere à quantidade de amostras que o conjunto deve ter para que se chegue a valores de k com ótima precisão. É evidente que quanto maior for a quantidade de amostras tanto maior deverá ser a precisão nos cálculos. Todavia, testes preliminares por nós realizados, com conjuntos de 100 amostras, mostraram-se **satisfatórios** em termos de precisão, razão pela qual adotamos este número de amostras. É importante **ênfatizar** que qualquer valor superior à **unidade** pode ser adotado para valores de k , porém, nosso objetivo é pesquisar valores de k que propicie a obtenção de somatório mínimo das quantidades de cálculo ao se utilizar de forma **híbrida**, os algoritmos parabólico e circular.

Como consequência de fixarmos em 100 a quantidade de amostras dos produtos $C=x*z$ resulta para variação da relação x/z o incremento 0,01 de modo a termos um intervalo de variação situado entre 0,01 e 1, isto é, x/z variando entre 0,01, 0,02, 0,03, 0,04... 0,96, 0,97, 0,98, 0,99, 1,00 o que deverá representar com razoável precisão as relações x/z intermediárias.

Cumpra **assinalar** que os valores de k dependem da SNPEFP utilizada nos cálculos que neste trabalho corresponde à SNPEFP₁₁. Caso se utilize outras SNPEFPs é de se esperar que a relação entre as quantidades de cálculo se altere para **mais** ou para **menos** conforme o módulo do primo limite adotado seja maior ou menor que 11.

3 Descrição do procedimento

Para determinação de $k_{1,9}$ e $k_{3,7}$ foram criadas duas tabelas (vide tabelas 1 e 2) cada qual contendo as seguintes colunas:

- ✓ Relação x/z genérica (variável de 0,01 a 1)
- ✓ Produtos $C=x*z$ (num total de 100 amostras)
- ✓ Valores adotados para k
- ✓ Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo circular
- ✓ Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo hiperbólico
- ✓ Quantidade total de cálculo
- ✓ Tempo total de cálculo

Com o auxílio de um aplicativo especialmente desenvolvido para esta finalidade, para cada valor de k ; em número de cem; foram calculados utilizando as mesmas amostras; também em número de cem; as quantidades de cálculo processadas pelos algoritmos circular e parabólico, o somatório dessas quantidades de cálculo bem como o tempo gasto em cada processamento.

Foram também processados **cálculos parciais** para testar a coerência de $k_{1,9}$ e $k_{3,7}$ e para tanto criamos três tabelas (vide tabelas 3 4 e 5). As tabelas 3 e 4 contem as seguintes colunas:

- ✓ Relação x/z genérica (variável de 0,01 a 1)
- ✓ Produtos $C=x*z$ (num total de 100 amostras)
- ✓ As colunas A, B e C correspondem aos cálculos parciais respectivamente dos k imediatamente anterior ao somatório mínimo de cálculo, ao somatório mínimo de cálculo e somatório de cálculo imediatamente posterior ao somatório mínimo de cálculo.
- ✓ Colunas A-B e C-B são respectivamente diferenças entre colunas A e B e C e B

A tabela 5 contem as seguintes colunas:

- ✓ Relação x/z
- ✓ Produto $C=x*z$
- ✓ Primo menor x
- ✓ Primo maior z
- ✓ QTCP=Quantidade total de cálculo processado

Por último foi criada a tabela 6 nos mesmos moldes das tabelas 1 e 2 onde apresentámos os elementos para determinação de $k_{3,7}$ com amostras de 8 dígitos.

4 Exame dos resultados obtidos

Examinando as tabelas 1 e 2 observa-se para valores de k próximos de 1 que a quantidade de cálculo para o algoritmo circular é mínima e para o algoritmo hiperbólico é máxima. Por sua vez a quantidade total de cálculo é próxima da máxima.

Paulatinamente, à medida que k cresce também cresce a quantidade de cálculo para o algoritmo circular e decresce a do algoritmo hiperbólico e da quantidade total de cálculo. Verifica-se também que este comportamento não é constante podendo ocorrer pontualmente inversões localizadas, mas que não propiciam inversão de tendência.

Continuando a variar de forma crescente o valor de k chega-se a um **ponto crítico** onde a quantidade total de cálculo processada pelos dois algoritmos é mínima, isto é resulta num *minimum minimorum* (mínimo dos mínimos). Estes pontos estão assinalados em linhas em negrito nas tabelas 1 e 2. Assim, a quantidade de cálculo do algoritmo circular que vinha crescente sofre uma pequena queda e volta a crescer enquanto a do algoritmo hiperbólico que vinha de uma queda mais ou menos continua sofre uma queda brusca ou uma descontinuidade e continua decrescendo. A partir deste ponto crítico, continuando a variar k de forma crescente, a quantidade de cálculo do algoritmo circular cresce continuamente e a do hiperbólico decresce. Das tabelas 1 e 2 obtemos os valores de k ótimos, arredondados para cinco casas decimais, que correspondem aos mínimos somatórios das quantidades de cálculo processadas pelos dois algoritmos:

$$K_{1,9} = 2,58199 \text{ e } k_{3,7} = 2,29416$$

Vale **lembrar** que os **tempos totais** assinalados nas últimas colunas das tabelas 1 e 2 nem sempre são confiáveis, pois dependem das atividades paralelas que o processador estiver realizando no momento dos cálculos podendo apresentar diferentes resultados quando se realizam sucessivos testes de uma mesma decomposição.

Testes de coerência para $k_{3,7}$ e $k_{1,9}$ estão indicados nas tabelas 3 e 4 onde foram realizados **cálculos parciais** para a linha em negrito onde ocorre o somatório mínimo das quantidades de cálculo (coluna B) e as linhas que a antecede e sucede (colunas A e C), As diferenças de resultado entre B e A e C e B estão assinalados respectivamente nas colunas B-A e C-B. Em ambos os casos ocorre uma descontinuidade abrupta nos cálculos processados pelo algoritmo hiperbólico. Estas ocorrências se dão em linhas anteriores à **linha crítica** onde acontece o somatório mínimo das quantidades de cálculo (vide linhas assinaladas em negrito nas tabelas 3 e 4).

Verifica-se no caso de $k_{3,7}$, a menos da linha onde se dá a descontinuidade abrupta que as diferenças B-A e C-B resultam em zero. Já para $k_{1,9}$ a menos da linha onde se dá a descontinuidade abrupta, as diferenças B-A e C-B em várias linhas se apresentam respectivamente com pequenos resultados negativos e positivos.

Determinação de k1,9 para amostras de 15 dígitos						
Relação x/z genérica	C= x*z	Valores adotados para k	Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo circular	Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo hiperbólico	Quantidade total de cálculo	Tempo total de cálculo
0,01	999944024422831	1,01	22.327	428.859.468	428.881.795	34,54272
0,02	99998987061289	1,02	84.839	415.853.474	415.938.313	33,52930
0,03	99997100702681	1,03	185.275	402.981.584	403.166.859	32,40993
0,04	99999531876451	1,04	320.989	390.245.214	390.566.203	31,44885
0,05	99993498333659	1,05	489.330	377.645.812	378.135.142	30,44044
0,06	99998093868931	1,06	687.698	365.184.894	365.872.592	29,50382
0,07	99998893136851	1,07	919.752	359.005.750	359.925.502	28,96228
0,08	99997779584911	1,08	1.172.993	346.755.503	347.928.496	28,04206
0,09	999986641379629	1,09	1.449.989	340.682.644	342.132.633	27,61311
0,10	99998990000099	1,10	1.748.471	328.646.744	330.395.215	26,71302
0,11	99997189821281	1,12	2.418.703	310.864.390	313.283.093	25,41756
0,12	99994889731339	1,14	3.142.250	293.414.532	296.556.782	24,07163
0,13	99996676653449	1,16	3.946.240	281.967.942	285.914.182	23,27695
0,14	99997945227581	1,18	4.804.488	265.086.804	269.891.292	22,05286
0,15	99999283293091	1,20	5.706.971	254.025.874	259.732.845	21,32421
0,16	99999364275679	1,25	8.082.942	221.802.757	229.885.699	19,18420
0,17	99999359521621	1,30	10.649.911	201.140.818	211.790.729	18,00667
0,18	99998555749511	1,35	13.178.363	176.279.406	189.457.769	16,17308
0,19	99999933678101	1,40	15.949.630	161.892.186	177.841.816	15,42495
0,20	99997875324709	1,45	18.567.619	143.356.432	161.924.051	14,42984
0,21	99996069182401	1,50	21.110.990	129.953.475	151.064.465	13,71886
0,22	99997882448381	1,55	23.794.540	116.995.223	140.789.763	13,02165
0,23	99994798397939	1,60	26.421.155	108.609.488	135.030.643	13,24964
0,24	99994375805639	1,70	31.075.827	88.577.625	119.653.452	11,84431
0,25	99997764163709	1,80	35.619.017	73.556.442	109.175.459	11,31519
0,26	99998783641411	1,90	40.252.287	62.912.448	103.164.735	11,15528
0,27	99998872889881	2,00	44.570.961	56.126.916	100.697.877	11,27918
0,28	99996078373951	2,10	47.834.069	46.445.036	94.279.105	11,08923
0,29	99998191253069	2,20	52.236.483	43.351.196	95.587.679	11,43161
0,30	99996567573569	2,30	55.635.309	37.531.372	93.166.681	11,35209
0,31	99998163591341	2,40	59.722.611	34.733.288	94.455.899	11,73624
0,32	99999324707771	2,50	62.562.684	29.380.369	91.943.053	11,77293
0,33	99997973171941	2,55	63.201.458	26.744.566	89.946.024	11,73209
0,34	99996888720989	2,58	64.266.308	26.743.440	91.009.748	11,96246
0,35	99997839581009	2,581	64.301.599	26.743.405	91.045.004	11,8976
0,36	99997613428969	2,5813	64.312.189	26.743.394	91.055.583	11,7799
0,37	99995984831549	2,5815	64.319.244	26.743.383	91.062.627	11,7725
0,38	99996860547689	2,581885	64.332.827	26.743.365	91.076.192	11,7664
0,39	99996845000281	2,5818890	64.332.970	26.743.365	91.076.335	11,7227
0,40	99999770000009	2,5818895	64.332.990	26.743.365	91.076.355	11,8781
0,41	99999550946849	2,58190	64.333.360	26.743.364	91.076.724	11,7837
0,42	99999673862089	2,58188990	64.333.005	26.743.365	91.076.370	11,7682
0,43	999995479617371	2,58188995	64.333.005	26.743.365	91.076.370	11,8136
0,44	99996002762021	2,581889999	64.333.006	26.743.365	91.076.371	11,8431
0,45	99998481078979	2,581889995	64.333.006	26.743.365	91.076.371	12,1195
0,46	99998463276751	2,581889999	64.333.006	26.743.365	91.076.371	11,7663
0,47	99998194267811	2,581990	63.110.468	24.193.137	87.303.605	11,4805
0,48	99999729771359	2,581991	63.110.497	24.193.137	87.303.634	11,3816
0,49	99996627550561	2,581992	63.110.537	24.193.137	87.303.674	11,4136
0,50	99998700844709	2,581996	63.110.667	24.193.137	87.303.804	11,3706

Tabela 1

Determinação de k1,9 para amostras de 15 dígitos - Continuação						
Relação x/z genérica	C= x*z	Valores adotados para k	Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo circular	Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo hiperbólico	Quantidade total de cálculo	Tempo total de cálculo
0,51	999999278554079	2,582	63.110.802	24.193.137	87.303.939	11,40755
0,52	999999794594519	2,583	63.144.218	24.193.102	87.337.320	11,39160
0,53	999998714132921	2,584	63.177.633	24.193.075	87.370.708	11,91324
0,54	999997083450451	2,585	63.211.061	24.193.031	87.404.092	11,39379
0,55	999968486879081	2,59	63.378.249	24.192.854	87.571.103	11,42970
0,56	999997116978179	2,60	63.713.005	24.192.471	87.905.476	11,56223
0,57	999991289713729	2,65	65.393.263	24.190.684	89.583.947	11,89291
0,58	99999673831871	2,70	67.045.263	21.725.204	88.770.467	11,85242
0,59	999989264039069	2,75	68.650.306	21.723.529	90.373.835	12,09717
0,60	999998511703769	2,85	70.299.490	19.346.247	89.645.737	12,13035
0,61	999984987924319	2,90	71.786.415	17.063.762	88.850.177	12,11793
0,62	999998280630799	2,95	73.228.964	17.062.318	90.291.282	12,28449
0,63	999999032580419	3,00	74.677.885	17.060.923	91.738.808	12,65675
0,64	999997047908171	3,05	74.332.330	14.875.692	89.208.022	12,30918
0,65	999997125491261	3,10	75.665.790	14.874.375	90.540.165	12,46930
0,66	999997424155819	3,15	77.004.287	14.873.125	91.877.412	12,71201
0,67	999958389905831	3,20	78.279.814	12.789.638	91.069.452	12,72146
0,68	999996543996179	3,25	79.527.590	12.788.442	92.316.032	13,09674
0,69	99999251699171	3,30	80.779.384	12.787.288	93.566.672	13,09674
0,70	999998143389881	3,35	79.935.463	10.810.804	90.746.267	12,73352
0,71	999997171493651	3,40	81.076.812	10.809.716	91.886.528	13,15276
0,72	999999186816961	3,45	82.209.475	10.808.648	93.018.123	13,11074
0,73	999997466389349	3,50	83.345.137	10.807.625	94.152.762	13,27786
0,74	99999206889409	3,55	84.462.649	8.944.219	93.406.868	13,30585
0,75	999996604103089	3,60	85.524.506	8.943.249	94.467.755	15,80652
0,76	999999391747709	3,65	86.566.218	8.942.313	95.508.531	13,72042
0,77	999999118088651	3,70	87.610.274	8.941.397	96.551.671	13,89325
0,78	999997309017389	3,75	88.656.545	8.940.510	97.597.055	14,15736
0,79	999997193569141	3,80	87.077.275	7.197.504	94.274.779	13,82346
0,80	999998363227879	3,85	88.015.231	7.196.646	95.211.877	13,79819
0,81	999998618681369	3,90	88.934.843	7.195.825	96.130.668	13,85925
0,82	999999159330869	3,95	89.856.106	7.195.012	97.051.118	14,32350
0,83	999999561483011	4,00	90.778.990	7.194.226	97.973.216	14,08440
0,84	999999309080329	4,10	92.603.261	5.579.817	98.183.078	14,23546
0,85	999998748113489	4,20	94.258.021	5.578.378	99.836.399	14,45865
0,86	999997701187271	4,30	95.910.286	5.576.998	101.487.284	14,74684
0,87	999998219235739	4,60	97.110.918	4.100.874	101.211.792	14,87394
0,88	99999786387691	5,00	102.591.071	4.096.567	106.687.638	15,73949
0,89	999999112029739	5,50	108.412.889	2.775.112	111.188.001	16,38895
0,90	999998966666669	6,00	108.489.949	1.630.857	110.120.806	16,34689
0,91	999998137453069	7,00	116.823.119	1.624.941	118.448.060	17,47465
0,92	999997406247439	10,00	133.379.011	683.115	134.062.126	19,82320
0,93	999999077977699	15,00	132.770.411	16.464	132.786.875	19,57603
0,94	999997295218939	20,00	138.268.715	12.388	138.281.103	20,42855
0,95	999998991641921	50,00	146.291.666	5.124	146.296.790	21,79652
0,96	999995998587479	100,00	151.217.812	2.603	151.220.415	22,28582
0,97	999996932409791	150,00	156.141.604	1.690	156.143.294	23,16540
0,98	999998422295129	200,00	161.081.915	1.213	161.083.128	23,87489
0,99	999998550095009	500,00	190.638.523	443	190.638.966	28,37067
1,00	999998950017311	1000,00	240.042.151	401	240.042.552	35,73380

Tabela 1 - Continuação

Determinação de k3,7 para amostras de 15 dígitos							
Relação x/z genérica	C= x*z	Valores adotados para k	Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo circular	Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo hiperbólico	Quantidade total de cálculo	Tempo total de cálculo	
0,01	99999680503487	1,01	31.491	429.188.549	429.220.040	36,62	
0,02	99998870785883	1,02	120.910	416.182.531	416.303.441	35,31	
0,03	999996870659903	1,03	265.048	403.310.681	403.575.729	34,14	
0,04	99999215648717	1,04	460.131	390.574.292	391.034.423	33,08	
0,05	99998872344313	1,05	702.768	377.974.905	378.677.673	32,18	
0,06	99999952900357	1,06	989.827	365.514.018	366.503.845	31,18	
0,07	994872933436493	1,07	1.317.632	359.334.913	360.652.545	30,65	
0,08	999998450405233	1,08	1.684.050	347.084.661	348.768.711	29,61	
0,09	996899972503697	1,09	2.086.196	341.012.064	343.098.260	29,22	
0,10	999997010000783	1,10	2.521.237	328.976.822	331.498.059	28,24	
0,11	999998906053943	1,12	3.481.995	311.195.305	314.677.300	26,83	
0,12	999995254879583	1,14	4.549.524	293.746.275	298.295.799	25,61	
0,13	99998606180983	1,16	5.707.564	282.299.721	288.007.285	24,80	
0,14	999995277923567	1,18	6.944.524	265.419.029	272.363.553	23,56	
0,15	999997789104527	1,20	8.247.457	254.358.169	262.605.626	22,77	
0,16	999996417033377	1,25	11.739.284	227.443.520	239.182.804	21,00	
0,17	99998864062763	1,30	15.450.017	201.514.246	216.964.263	19,44	
0,18	999994798161803	1,35	19.292.574	176.652.817	195.945.391	17,85	
0,19	99999272044133	1,40	23.197.622	162.268.025	185.465.647	17,23	
0,20	99998327872517	1,45	27.108.744	143.732.294	170.841.038	16,27	
0,21	999995115552157	1,50	30.995.455	130.329.327	161.324.782	15,62	
0,22	99998831720893	1,55	34.828.808	117.371.083	152.199.891	15,14	
0,23	99999809689207	1,60	38.592.862	108.985.667	147.578.529	15,07	
0,24	99999797981363	1,65	42.264.932	96.804.531	139.069.463	14,61	
0,25	99999282056597	1,70	45.843.917	88.953.790	134.797.707	14,38	
0,26	99999098689673	1,75	49.323.815	81.327.565	130.651.380	14,25	
0,27	999994377920597	1,80	52.703.290	73.932.601	126.635.891	14,20	
0,28	99999305490793	1,85	55.972.983	70.322.321	126.295.304	14,07	
0,29	999994002031247	1,90	59.137.831	63.288.593	122.426.424	14,28	
0,30	99999800734633	1,95	62.200.432	59.863.773	122.064.205	14,00	
0,31	999998958737707	2,00	65.170.790	56.503.070	121.673.860	14,16	
0,32	999998573389217	2,05	68.023.996	49.981.924	118.005.920	14,08	
0,33	999996083921357	2,10	70.784.788	46.821.151	117.605.939	14,29	
0,34	999998990776223	2,15	73.453.610	43.729.944	117.183.554	14,50	
0,35	999994659173267	2,20	76.032.732	40.709.861	116.742.593	14,63	
0,36	999998983748543	2,25	78.526.239	37.762.626	116.288.865	14,63	
0,37	999998907568613	2,27	79.494.804	37.761.657	117.256.461	14,84	
0,38	999997094470277	2,29	80.467.488	37.760.693	118.228.181	14,93	
0,39	999998142319717	2,292	80.564.975	37.760.600	118.325.575	14,91	
0,40	999996990001957	2,2940	80.662.499	37.760.506	118.423.005	15,120	
0,41	999851007891917	2,294150	80.669.815	37.760.500	118.430.315	14,943	
0,42	999998198301217	2,294154	80.670.009	37.760.500	118.430.509	15,205	
0,43	999994225786117	2,294156	80.670.107	37.760.500	118.430.607	15,158	
0,44	999996586282367	2,2941570	80.670.156	37.760.500	118.430.656	15,171	
0,45	99999273038113	2,2941577	80.670.189	37.760.500	118.430.689	15,474	
0,46	99999302530477	2,294157710	80.670.190	37.760.500	118.430.690	15,012	
0,47	999999024545333	2,29415771101	80.670.189	34.890.317	115.560.506	14,881	
0,48	999995829987337	2,29415771105	80.670.189	34.890.317	115.560.506	14,840	
0,49	99999880178713	2,2941577110	80.670.189	34.890.317	115.560.506	14,789	
0,50	999998208910387	2,294157715	80.670.189	34.890.317	115.560.506	14,883	

Tabela 2

Determinação de k3,7 para amostras de 15 dígitos- continuação

Relação x/z genérica	C= x*z	Valores adotados para k	Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo circular	Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo hiperbólico	Quantidade total de cálculo	Tempo total de cálculo
0,51	999987420205987	2,29415772	80.670.189	34.890.317	115.560.506	14,900
0,52	999997563360407	2,29415775	80.670.191	34.890.317	115.560.508	14,842
0,53	999517240471207	2,2941578	80.670.195	34.890.317	115.560.512	14,922
0,54	999974089984117	2,2941579	80.670.198	34.890.317	115.560.515	14,952
0,55	999967463515697	2,29416	80.670.293	34.890.317	115.560.610	14,760
0,56	999999446221277	2,29420	80.672.142	34.890.314	115.562.456	14,827
0,57	999992294963017	2,2944	80.681.388	34.890.306	115.571.694	14,793
0,58	999997514649547	2,2948	80.699.874	34.890.287	115.590.161	14,779
0,59	999992722258337	2,298	80.847.831	34.890.129	115.737.960	14,885
0,60	999995278382117	2,30	80.940.352	34.890.035	115.830.387	14,88
0,61	999985149879587	2,304	81.125.510	34.889.858	116.015.368	14,80
0,62	999995809932017	2,308	81.310.813	34.889.682	116.200.495	14,78
0,63	999987561573017	2,31	81.403.519	34.889.575	116.293.094	14,74
0,64	999937281017267	2,35	83.265.340	34.887.744	118.153.084	15,09
0,65	999970281123337	2,40	85.500.445	32.091.931	117.592.376	15,21
0,66	992376147821117	2,45	87.672.022	29.374.895	117.046.917	15,38
0,67	999966348367897	2,50	89.794.455	29.372.874	119.167.329	15,66
0,68	999997102346167	2,55	91.799.813	26.737.073	118.536.886	15,76
0,69	999998718728677	2,60	93.771.062	24.184.978	117.956.040	15,69
0,70	999994764392207	2,65	95.669.139	24.183.190	119.852.329	16,26
0,71	999987440907757	2,70	97.504.559	21.717.717	119.222.276	16,21
0,72	999999484959257	2,75	99.289.023	21.716.044	121.005.067	16,59
0,73	999983306472937	2,80	101.010.430	19.340.310	120.350.740	16,61
0,74	999927037323197	2,90	104.312.776	17.056.273	121.369.049	17,42
0,75	999990250525627	3,00	107.403.373	17.053.434	124.456.807	17,26
0,76	999995804993117	3,10	110.280.157	14.866.882	125.147.039	17,55
0,77	9999894916915327	3,20	113.028.294	12.782.149	125.810.443	17,77
0,78	999908912416637	3,30	115.617.042	12.779.800	128.396.842	18,14
0,79	999928954027807	3,40	118.029.790	10.805.265	128.835.055	18,48
0,80	999966840427267	3,50	120.359.808	10.803.179	131.162.987	18,71
0,81	999896813550073	3,60	122.513.869	8.938.800	131.452.669	19,00
0,82	999884823985153	3,70	124.574.201	8.936.945	133.511.146	19,11
0,83	999883590103457	3,80	126.583.611	7.197.524	133.781.135	19,35
0,84	999909704724067	3,90	128.366.741	7.195.845	135.562.586	19,63
0,85	999923924707273	4,00	130.156.289	7.194.252	137.350.541	19,92
0,86	999998110383347	4,30	134.910.554	5.577.022	140.487.576	21,05
0,87	999998278227173	4,60	139.071.565	4.100.888	143.172.453	20,94
0,88	999993314070187	5,00	143.967.818	4.096.584	148.064.402	21,69
0,89	999996631545077	5,50	148.609.961	2.775.131	151.385.092	22,13
0,90	999997496666837	6,00	152.585.778	1.630.880	154.216.658	22,61
0,91	999996015874637	7,00	158.904.016	1.624.967	160.528.983	23,53
0,92	999999165474497	10,00	168.912.661	24.680	168.937.341	25,02
0,93	999999143560253	15,00	169.646.825	16.459	169.663.284	25,14
0,94	999999708832613	20,00	170.383.462	12.382	170.395.844	25,93
0,95	999995617438777	50,00	174.813.394	5.122	174.818.516	25,73
0,96	999996904863007	100,00	182.198.221	2.603	182.200.824	26,96
0,97	999999565269973	150,00	189.581.100	1.689	189.582.789	28,19
0,98	999999188946353	200,00	196.976.003	1.213	196.977.216	29,33
0,99	999998109595747	500,00	241.278.031	443	241.278.474	35,72
1,00	999998886771757	1000,00	315.215.193	401	315.215.594	46,45

Tabela 2 - Continuação

Cálculos parciais - Testes de coerência para k3,7

x/z	x*z	A-B	A) k=2,581889999	B) k=2,58199	C) k=2,581991	C-B
0,01	999944024422831	-189	2.806.700	2.806.889	2.806.891	2
0,02	999998987061289	-190	3.079.173	3.079.363	3.079.364	1
0,03	999997100702681	-188	3.288.277	3.288.465	3.288.467	2
0,04	999999531876451	-188	3.465.039	3.465.227	3.465.229	2
0,05	999993498333659	-188	3.620.371	3.620.559	3.620.562	3
0,06	999998093868931	-188	3.760.841	3.761.029	3.761.031	2
0,07	999998893136851	-189	3.889.616	3.889.805	3.889.806	1
0,08	999997779584911	-188	4.010.254	4.010.442	4.010.443	1
0,09	999986641379629	-187	4.123.152	4.123.339	4.123.341	2
0,10	999998990000099	-189	4.229.630	4.229.819	4.229.820	1
0,11	999997189821281	-188	4.331.235	4.331.423	4.331.425	2
0,12	999994889731339	-188	4.428.317	4.428.505	4.428.508	3
0,13	999996676653449	-187	4.521.813	4.522.000	4.522.002	2
0,14	999997945227581	-188	4.611.419	4.611.607	4.611.608	1
0,15	999999283293091	3.776.101	4.697.513	921.412	921.412	0
0,16	999999364275679	-55	2.037.857	2.037.912	2.037.912	0
0,17	999999359521621	0	796.524	796.524	796.524	0
0,18	999985555749511	-54	1.850.497	1.850.551	1.850.551	0
0,19	999999933678101	0	694.406	694.406	694.406	0
0,20	999997875324709	-53	1.695.156	1.695.209	1.695.209	0
0,21	999996069182401	0	855.672	855.672	855.672	0
0,22	999997882448381	-54	1.565.465	1.565.519	1.565.519	0
0,23	999994798397939	0	537.886	537.886	537.886	0
0,24	999994375805639	-53	1.454.572	1.454.625	1.454.626	1
0,25	999997764163709	0	476.466	476.466	476.466	0
0,26	999998783641411	-53	1.359.913	1.359.966	1.359.967	1
0,27	999998872889881	0	423.094	423.094	423.094	0
0,28	999996078373951	-54	1.277.540	1.277.594	1.277.594	0
0,29	999998191253069	0	377.272	377.272	377.272	0
0,30	999996567573569	-54	1.205.234	1.205.288	1.205.288	0
0,31	999998163591341	0	336.472	336.472	336.472	0
0,32	999999324707771	-54	1.142.295	1.142.349	1.142.350	1
0,33	999997973171941	0	300.797	300.797	300.797	0
0,34	999996888720989	-54	1.086.020	1.086.074	1.086.074	0
0,35	999997839581009	0	269.520	269.520	269.520	0
0,36	999997613428969	-53	1.036.347	1.036.400	1.036.401	1
0,37	999995984831549	0	241.385	241.385	241.385	0
0,38	999996860547689	-54	992.053	992.107	992.107	0
0,39	999996845000281	0	215.920	215.920	215.920	0
0,40	999999770000009	-54	952.420	952.474	952.474	0
0,41	999999550946849	0	193.734	193.734	193.734	0
0,42	999999673862089	0	908.218	908.218	908.218	0
0,43	999995479617371	0	173.175	173.175	173.175	0
0,44	999996002762021	0	812.610	812.610	812.610	0
0,45	999998481078979	0	155.285	155.285	155.285	0
0,46	999998463276751	0	726.132	726.132	726.132	0
0,47	999998194267811	0	138.521	138.521	138.521	0
0,48	999999729771359	0	647.738	647.738	647.738	0
0,49	999996627550561	0	123.678	123.678	123.678	0
0,50	999998700844709	0	577.175	577.175	577.175	0

Tabela 3

Cálculos parciais - Testes de coerência para k3,7

x/z	C=x*z	A-B	A) k= 2,294157710	B) k= 2,29415771101	C) k=2,29415771105	C-B
0,51	999987420205987	0	363.881	363.881	363.881	0
0,52	999997563360407	0	343.126	343.126	343.126	0
0,53	999517240471207	0	323.866	323.866	323.866	0
0,54	999974089984117	0	304.672	304.672	304.672	0
0,55	999967463515697	0	286.788	286.788	286.788	0
0,56	999999446221277	0	269.746	269.746	269.746	0
0,57	99992294963017	0	253.497	253.497	253.497	0
0,58	999997514649547	0	238.078	238.078	238.078	0
0,59	999992722258337	0	223.411	223.411	223.411	0
0,60	999995278382117	0	209.452	209.452	209.452	0
0,61	999985149879587	0	196.192	196.192	196.192	0
0,62	999995809932017	0	183.558	183.558	183.558	0
0,63	999987561573017	0	171.570	171.570	171.570	0
0,64	999937281017267	0	160.184	160.184	160.184	0
0,65	999970281123337	0	149.331	149.331	149.331	0
0,66	992376147821117	0	143.598	143.598	143.598	0
0,67	999966348367897	0	129.309	129.309	129.309	0
0,68	999997102346167	0	120.029	120.029	120.029	0
0,69	999998718728677	0	111.238	111.238	111.238	0
0,70	999994764392207	0	102.920	102.920	102.920	0
0,71	999987440907757	0	94.999	94.999	94.999	0
0,72	999999484959257	0	87.544	87.544	87.544	0
0,73	999983306472937	0	80.505	80.505	80.505	0
0,74	999927037323197	0	73.877	73.877	73.877	0
0,75	999990250525627	0	67.588	67.588	67.588	0
0,76	999995804993117	0	61.700	61.700	61.700	0
0,77	999894916915327	0	56.123	56.123	56.123	0
0,78	999908912416637	0	50.935	50.935	50.935	0
0,79	999928954027807	0	46.018	46.018	46.018	0
0,80	999966840427267	0	41.459	41.459	41.459	0
0,81	999896813550073	0	37.168	37.168	37.168	0
0,82	999884823985153	0	33.220	33.220	33.220	0
0,83	999883590103457	0	29.526	29.526	29.526	0
0,84	999909704724067	0	26.092	26.092	26.092	0
0,85	999923924707273	0	22.935	22.935	22.935	0
0,86	999998110383347	0	20.033	20.033	20.033	0
0,87	99998278227173	0	17.397	17.397	17.397	0
0,88	999993314070187	0	14.971	14.971	14.971	0
0,89	999996631545077	0	12.781	12.781	12.781	0
0,90	999997496666837	0	10.834	10.834	10.834	0
0,91	999996015874637	0	9.079	9.079	9.079	0
0,92	99999165474497	0	7.538	7.538	7.538	0
0,93	99999143560253	0	6.212	6.212	6.212	0
0,94	99999708832613	0	5.079	5.079	5.079	0
0,95	999995617438777	0	4.132	4.132	4.132	0
0,96	999996904863007	0	3.366	3.366	3.366	0
0,97	999999565269973	0	2.786	2.786	2.786	0
0,98	999999188946353	0	2.368	2.368	2.368	0
0,99	999998109595747	0	2.125	2.125	2.125	0
1,00	999998886771757	0	2.050	2.050	2.050	0
	Somatórios	2.870.184	118.430.690	115.560.506	115.560.506	0

Tabela 3 - continuação

Cálculos parciais - Teste de coerência para k1,9

x/z	x*z	A-B	A) k=2,581889999	B) k=2,58199	C) k=2,581991	C-B
0,01	999944024422831	-189	2.806.700	2.806.889	2.806.891	2
0,02	999998987061289	-190	3.079.173	3.079.363	3.079.364	1
0,03	999997100702681	-188	3.288.277	3.288.465	3.288.467	2
0,04	999999531876451	-188	3.465.039	3.465.227	3.465.229	2
0,05	999993498333659	-188	3.620.371	3.620.559	3.620.562	3
0,06	999998093868931	-188	3.760.841	3.761.029	3.761.031	2
0,07	999998893136851	-189	3.889.616	3.889.805	3.889.806	1
0,08	999997779584911	-188	4.010.254	4.010.442	4.010.443	1
0,09	999986641379629	-187	4.123.152	4.123.339	4.123.341	2
0,10	999998990000099	-189	4.229.630	4.229.819	4.229.820	1
0,11	999997189821281	-188	4.331.235	4.331.423	4.331.425	2
0,12	999994889731339	-188	4.428.317	4.428.505	4.428.508	3
0,13	999996676653449	-187	4.521.813	4.522.000	4.522.002	2
0,14	999997945227581	-188	4.611.419	4.611.607	4.611.608	1
0,15	999999283293091	3.776.101	4.697.513	921.412	921.412	0
0,16	999999364275679	-55	2.037.857	2.037.912	2.037.912	0
0,17	999999359521621	0	796.524	796.524	796.524	0
0,18	999985555749511	-54	1.850.497	1.850.551	1.850.551	0
0,19	999999933678101	0	694.406	694.406	694.406	0
0,20	999997875324709	-53	1.695.156	1.695.209	1.695.209	0
0,21	999996069182401	0	855.672	855.672	855.672	0
0,22	999997882448381	-54	1.565.465	1.565.519	1.565.519	0
0,23	999994798397939	0	537.886	537.886	537.886	0
0,24	999994375805639	-53	1.454.572	1.454.625	1.454.626	1
0,25	999997764163709	0	476.466	476.466	476.466	0
0,26	999998783641411	-53	1.359.913	1.359.966	1.359.967	1
0,27	999998872889881	0	423.094	423.094	423.094	0
0,28	999996078373951	-54	1.277.540	1.277.594	1.277.594	0
0,29	999998191253069	0	377.272	377.272	377.272	0
0,30	999996567573569	-54	1.205.234	1.205.288	1.205.288	0
0,31	999998163591341	0	336.472	336.472	336.472	0
0,32	999999324707771	-54	1.142.295	1.142.349	1.142.350	1
0,33	999997973171941	0	300.797	300.797	300.797	0
0,34	999996888720989	-54	1.086.020	1.086.074	1.086.074	0
0,35	999997839581009	0	269.520	269.520	269.520	0
0,36	999997613428969	-53	1.036.347	1.036.400	1.036.401	1
0,37	999995984831549	0	241.385	241.385	241.385	0
0,38	999996860547689	-54	992.053	992.107	992.107	0
0,39	999996845000281	0	215.920	215.920	215.920	0
0,40	999999770000009	-54	952.420	952.474	952.474	0
0,41	999999550946849	0	193.734	193.734	193.734	0
0,42	999999673862089	0	908.218	908.218	908.218	0
0,43	999995479617371	0	173.175	173.175	173.175	0
0,44	999996002762021	0	812.610	812.610	812.610	0
0,45	999998481078979	0	155.285	155.285	155.285	0
0,46	999998463276751	0	726.132	726.132	726.132	0
0,47	999998194267811	0	138.521	138.521	138.521	0
0,48	999999729771359	0	647.738	647.738	647.738	0
0,49	999996627550561	0	123.678	123.678	123.678	0
0,50	999998700844709	0	577.175	577.175	577.175	0

Tabela 4

Cálculos parciais - Teste de coerência para k1,9

x/z	x*z	A-B	A) k=2,581889999	B) k=2,58199	C) k=2,581991	C-B
0,51	999999278554079	0	110.579	110.579	110.579	0
0,52	999999794594519	0	513.325	513.325	513.325	0
0,53	999998714132921	0	98.100	98.100	98.100	0
0,54	999997083450451	0	455.850	455.850	455.850	0
0,55	999968486879081	0	87.101	87.101	87.101	0
0,56	999997116978179	0	403.164	403.164	403.164	0
0,57	999991289713729	0	77.461	77.461	77.461	0
0,58	999999673831871	0	356.074	356.074	356.074	0
0,59	999989264039069	0	68.433	68.433	68.433	0
0,60	999998511703769	0	312.817	312.817	312.817	0
0,61	999984987924319	0	60.263	60.263	60.263	0
0,62	999998280630799	0	273.972	273.972	273.972	0
0,63	999999032580419	0	52.873	52.873	52.873	0
0,64	999997047908171	0	239.182	239.182	239.182	0
0,65	999997125491261	0	45.873	45.873	45.873	0
0,66	999997424155819	0	207.167	207.167	207.167	0
0,67	999958389905831	0	39.855	39.855	39.855	0
0,68	999996543996179	0	178.607	178.607	178.607	0
0,69	999999251699171	0	34.432	34.432	34.432	0
0,70	999998143389881	0	153.271	153.271	153.271	0
0,71	999997171493651	0	29.570	29.570	29.570	0
0,72	999999186816961	0	130.268	130.268	130.268	0
0,73	999997466389349	0	25.545	25.545	25.545	0
0,74	999999206889409	0	109.399	109.399	109.399	0
0,75	999996604103089	0	21.669	21.669	21.669	0
0,76	999999391747709	0	91.132	91.132	91.132	0
0,77	999999118088651	0	17.904	17.904	17.904	0
0,78	999997309017389	0	74.979	74.979	74.979	0
0,79	999997193569141	0	14.872	14.872	14.872	0
0,80	999998363227879	0	60.786	60.786	60.786	0
0,81	999998618681369	0	12.545	12.545	12.545	0
0,82	999999159330869	0	48.420	48.420	48.420	0
0,83	999999561483011	0	9.917	9.917	9.917	0
0,84	999999309080329	0	37.748	37.748	37.748	0
0,85	999998748113489	0	8.272	8.272	8.272	0
0,86	999997701187271	0	28.986	28.986	28.986	0
0,87	999998219235739	0	6.603	6.603	6.603	0
0,88	99999786387691	-1	21.383	21.384	21.384	0
0,89	999999112029739	0	5.219	5.219	5.219	0
0,90	99999896666669	0	14.844	14.844	14.844	0
0,91	999998137453069	0	4.107	4.107	4.107	0
0,92	999997406247439	0	9.919	9.919	9.919	0
0,93	999999077977699	0	3.251	3.251	3.251	0
0,94	999997295218939	0	6.215	6.215	6.215	0
0,95	999998991641921	0	2.299	2.299	2.299	0
0,96	999995998587479	0	3.650	3.650	3.650	0
0,97	999996932409791	0	1.895	1.895	1.895	0
0,98	999998422295129	0	2.157	2.157	2.157	0
0,99	999998550095009	0	2.021	2.021	2.021	0
1,00	999998950017311	0	1.998	1.998	1.998	0
	Somatórios	3.772.766	91.076.371	87.303.605	87.303.634	29

Tabela 4 - Continuação

Na tabela 5 apresentamos também um teste de coerência para cálculos parciais. Os cálculos para as relações x/z iguais a 0,30 e 0,31 foram extraídos da tabela 3, onde se realizou testes de coerência na linha em que se deu o somatório mínimo das quantidades processadas pelos algoritmos circular e hiperbólico. Já para a relação $x/z=0,315$, intermediária entre 0,30 e 0,31 foi calculada pelo software DNI. A quantidade de cálculo obtida igual a 1.149.668 é coerente com os resultados apresentados para as relações x/z iguais a 0,30 e 0,31 respectivamente iguais a 1.186.201 e 1.117.945, pois o valor 1.149.668 é intermediário entre os dois e confirma certa coerência aos resultados obtidos. Observar que a variação nos cálculos não é linear.

Rel. x/z	$C=x*z$	x	z	QTCP
0,300	999999800734633	17320507	57735019	1.186.201
0,305	999997590040817	17464217	57259801	1.149.668
0,310	999998958737707	17606803	56796169	1.117.945

Tabela 5

A tabela 6 trata da determinação de $k_{3,7}$ para amostras de 8 dígitos, com $C'=10.499.999$. A finalidade é a de comparar se há grande diferença com o valor obtido para $k_{3,7}$ quando o número de dígitos é 15. Os cálculos confirmam que quanto menor a quantidade de dígitos menos precisos são os resultados obtidos para $k_{3,7}$. Verifica-se a existência de certo grau de dispersão, isto é, as relações x/z da tabela 6 em boa parte se encontram relativamente afastadas do que seria um segmento da função ressalto ou delta de **Dirac** (Paul Dirac – matemático britânico * 08//1902 + 20//10/1984) que representaria a variação da relação x/z entre 0,01 e 1 com escalão ou incremento de 0,01. Em parte isto se deve à limitação de combinações que os valores dos primos selecionados oferecem para a obtenção de produtos o mais próximo possível de C' .

Observando os resultados obtidos na tabela 6 (vide linhas assinaladas em negrito) verifica-se a existência de duas descontinuidades bruscas que poderia sugerir a existência de uma possível controvérsia nos resultados obtidos. No entanto, dos dois valores obtidos para k arredondados para cinco decimais (2,04491 e 2,2960) este último valor é bastante próximo do valor de $k_{3,7}=2,29416$ obtido para amostras de 15 dígitos.

Deixamos de apresentar um exemplo de cálculo do algoritmo hipercircular uma vez que, a menos da determinação de k ótimo que possibilita o uso eficiente dos dois algoritmos, ele se baseia nos elementos já estabelecidos naqueles algoritmos.

A seguir apresentamos o roteiro básico para elaboração de um programa fonte do algoritmo hipercircular.

Determinação de k3, 7 para amostras de 8 dígitos

x/z	C=x*z	Valores adotados para k	Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo circular	Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo hiperbólico	Quantidade total de cálculo
0,0096	10476533	1,01	725	45.652	46.377
0,0196	10285243	1,02	734	43.637	44.371
0,0298	10416457	1,03	747	42.952	43.699
0,0400	10474283	1,04	769	41.625	42.394
0,0471	9895987	1,05	792	40.955	41.747
0,0584	10226017	1,06	820	39.012	39.832
0,0700	10490537	1,07	846	38.360	39.206
0,0796	10428217	1,08	881	37.707	38.588
0,0882	10291447	1,09	925	36.433	37.358
0,0996	10462187	1,10	975	35.179	36.154
0,1088	10384447	1,12	1.067	33.321	34.388
0,1195	10442833	1,14	1.174	32.090	33.264
0,1297	10430947	1,16	1.304	30.287	31.591
0,1389	10385047	1,18	1.433	28.516	29.949
0,1493	10445387	1,20	1.567	27.347	28.914
0,1596	10440317	1,25	1.929	23.955	25.884
0,1692	10405007	1,30	2.325	22.252	24.577
0,1794	10417907	1,35	2.736	19.631	22.367
0,1896	10473097	1,40	3.160	17.602	20.762
0,1987	10422677	1,45	3.576	16.116	19.692
0,2098	10483327	1,50	3.987	14.682	18.669
0,2188	10436477	1,55	4.412	13.289	17.701
0,2300	10484303	1,60	4.817	11.952	16.769
0,2390	10432453	1,65	5.225	11.080	16.305
0,2489	10453853	1,70	5.628	10.226	15.854
0,2621	10626523	1,75	6.022	9.396	15.418
0,2718	10545697	1,80	6.403	8.601	15.004
0,2815	10546483	1,85	6.779	8.190	14.969
0,2883	10417063	1,90	7.139	7.428	14.567
0,2980	10383377	1,95	7.500	7.036	14.536
0,3098	10469213	2,00	7.843	6.652	14.495
0,3203	10467827	2,04	8.121	6.289	14.410
0,3274	10418927	2,041	8.126	6.289	14.415
0,3399	10497173	2,044	8.147	6.287	14.434
0,3526	10576087	2,0445	8.148	6.287	14.435
0,3580	10436267	2,0449	8.154	6.286	14.440
0,3716	10474657	2,044904	8.154	6.286	14.440
0,3779	10364023	2,044907	8.154	6.286	14.440
0,3906	10518103	2,0449071	8.154	6.286	14.440
0,4030	10560497	2,0449075	8.154	5.958	14.112
0,4117	10537897	2,044908	8.154	5.958	14.112
0,4227	10562887	2,04498	8.154	5.958	14.112
0,4312	10510873	2,045	8.154	5.958	14.112
0,4431	10539197	2,046	8.160	5.958	14.118
0,4524	10496243	2,049	8.175	5.957	14.132
0,4629	10484077	2,05	8.182	5.956	14.138
0,4741	10574797	2,10	8.477	5.883	14.360
0,4817	10518923	2,15	8.796	5.535	14.331
0,4919	10503533	2,20	9.098	5.199	14.297
0,4977	10453823	2,24	9.342	5.180	14.522

Tabela 6

Determinação de k3,7 para amostras de 8 dígitos

x/z	C=x*z	Valores adotados para k	Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo circular	Quantidade de cálculo processada pelo algoritmo hiperbólico	Quantidade total de cálculo
0,5109	10452653	2,2950	9.674	4.852	14.526
0,5206	10509127	2,2960	9.678	4.852	14.530
0,5295	10491007	2,296001	9.678	4.852	14.530
0,5391	10480193	2,296003	9.678	4.852	14.530
0,5513	10543303	2,2960034	9.678	4.560	14.238
0,5572	10432397	2,2960035	9.678	4.560	14.238
0,5705	10495183	2,29601	9.678	4.560	14.238
0,5782	10458127	2,29605	9.679	4.559	14.238
0,5862	10433587	2,2961	9.679	4.559	14.238
0,5987	10465043	2,29625	9.680	4.559	14.239
0,6144	10525477	2,2965	9.682	4.559	14.241
0,6220	10511827	2,30	9.706	4.556	14.262
0,6269	10430003	2,40	10.261	4.223	14.484
0,6404	10499057	2,50	10.800	3.903	14.703
0,6512	10517723	2,60	11.326	3.326	14.652
0,6636	10558883	2,70	11.826	3.040	14.866
0,6737	10495073	2,80	12.301	2.760	15.061
0,6813	10517933	2,90	12.759	2.495	15.254
0,6925	10473077	3,00	13.199	2.459	15.658
0,7039	10503497	3,20	14.029	1.964	15.993
0,7120	10460257	3,40	14.823	1.705	16.528
0,7229	10454447	3,60	15.539	1.469	17.008
0,7345	10589833	3,80	16.230	1.254	17.484
0,7404	10506163	4,00	16.878	1.229	18.107
0,7497	10480417	4,30	17.783	1.037	18.820
0,7638	10507597	4,60	18.672	1.017	19.689
0,7686	10471367	4,90	19.466	861	20.327
0,7783	10488047	5,20	20.212	716	20.928
0,7903	10488197	5,50	20.937	707	21.644
0,8029	10539307	5,80	21.650	587	22.237
0,8096	10452037	6,00	22.071	583	22.654
0,8203	10530437	6,50	23.104	577	23.681
0,8281	10559447	7,00	24.156	572	24.728
0,8404	10489477	8,00	25.998	476	26.474
0,8527	10547483	9,00	27.829	473	28.302
0,8561	10589687	10,00	29.585	471	30.056
0,8714	10486787	11,00	31.157	405	31.562
0,8797	10512737	12,00	32.662	404	33.066
0,8916	10508413	13,00	34.176	404	34.580
0,9021	10508627	14,00	35.667	404	36.071
0,9067	10524223	15,00	37.156	404	37.560
0,9217	10486657	20,00	44.653	404	45.057
0,9334	10543457	25,00	52.943	404	53.347
0,9418	10449347	30,00	59.822	404	60.226
0,9537	10530587	50,00	93.579	404	93.983
0,9619	10519567	100,00	113.468	404	113.872
0,9661	10513913	200,00	117.210	404	117.614
0,9792	10477013	300,00	117.216	404	117.620
0,9889	10490797	500,00	117.217	404	117.621
0,9994	10575503	1000,00	117.217	404	117.621

Tabela 6 – continuação

5 Roteiro básico para elaboração de um programa fonte do algoritmo hipercircular

- 1) Criar uma tela na qual se possa digitar o dado de entrada que no caso é o número a ser decomposto. Só deverá ser aceito números inteiros. Os textos deverão ser apresentados em português e inglês
- 2) Após o término da decomposição deverá ser apresentado na tela os dados de saída. Os fatores primos encontrados deverão ser apresentados de forma ordenada. Fatores primos que eventualmente se repetirem deverão ser apresentados na forma de potência. Outros dados deverão ser apresentados com informações em português e inglês. Deverão ser criados arquivos para armazenar provisória e permanentemente os números inteiros resultantes das decomposições. Primeiramente deverão permanecer num arquivo provisório.
- 3) Os números que se revelarem primos serão armazenados num arquivo permanente para ao final do processo ser resgatados como primos que compõem o número a ser decomposto. Os demais devem ficar num arquivo provisório para que esperem a vez de serem testados em termos de primalidade. Mais: Um arquivo para acumular os tempos parciais oriundos de cada atuação dos dois algoritmos e três arquivos, os dois primeiros para acumular as quantidades de cálculo oriundas de cada atuação dos algoritmos circular e hiperbólico e o terceiro para arquivar o somatório dos cálculos processados pelos dois algoritmos. De posse do número $C=y^2$ a ser decomposto deverão ser elaborados os seguintes cálculos: verificar se o número C é divisível pelos primos 2, 3, 5, 7 e 11 (primos inferiores ou igual ao primo limite que no caso do aplicativo DNI é 11). Caso um ou mais destes fatores existirem, inclusive na forma de potência, eles deverão ser armazenados permanentemente para serem apresentados ao final dos cálculos na tela de saída.
- 4) O algoritmo circular começa calculando o máximo valor que x (inteiro menor) pode alcançar (seu valor é dado por $x_{\max}=C^{1/2}$). Determina o diâmetro mínimo (seu valor é calculado em função de x_{\max} e vale $D_{\min}=2*x_{\max}$). Determina o valor de x' que define os intervalos de cálculo onde os algoritmos circular e hiperbólico irão atuar que por sua vez é definido como $x'=x_{\max}/k$ onde k é uma constante maior que 1 e é previamente definida. O valor de D_{\min} é arredondado para cima. Este arredondamento é feito em função da terminação numérica decenária (dezena do número C a ser decomposto) e suas relações com as terminações diametrais unitárias e decenárias devendo ser consultada a tabela 4 do artigo “*Algoritmo Circular*” [1] para se estabelecer os arredondamentos necessários. O diâmetro mínimo é arredondado para cada diâmetro de partida (eles podem ser em número de 2 ou 3 dependendo se a terminação numérica unitária respectivamente terminar em 3 e 7 ou 1 e 9). Os diâmetros assim arredondados devem ser ordenados de forma crescente e a partir daí variar, dependendo do caso, com incrementos de 20 ou 100.
- 5) Os testes começam sempre pelo algoritmo circular utilizando a fórmula x ou $z= [(D+\text{ou}-(D^2-4y^2)^{1/2})]/2$ e têm como condições de interrupção quando se obtiver x e z inteiros ou, caso contrário, quando x calculado for menor ou igual a x' . Caso ocorra a 1ª condição os valores de x e z são provisoriamente armazenados. Também é armazenada a quantidade de cálculo executada pelo algoritmo circular e o tempo gasto.
- 6) Em seguida x e z encontrados são testados quanto à primalidade. Para tanto se retorna à fase 4. Caso seja novamente encontrado dois ou quatro números inteiros para x e z

arquiva-se provisoriamente os inteiros encontrados para que sejam testados quanto à primalidade. Se x ou z ou ambos forem primos eles devem ser armazenados de forma permanente. O algoritmo circular permanece testando a primalidade dos inteiros encontrados até que resultem somente números primos e o problema da decomposição se encerra.

Alerta: pode ocorrer que o número original ou mesmo números oriundos da decomposição original ao ser testado pelo algoritmo circular não encontre x e z inteiros. Neste caso, entra em ação a segunda condição de interrupção, isto é x menor ou igual a x' . Nesta situação os cálculos passam a ser executados pelo algoritmo hiperbólico conforme descrito no item 7.

7) Caso não encontre x e z inteiros (não importa se oriundos de C primário ou secundário) haverá um momento em que x calculado irá ficar menor ou igual a x' . Neste momento o algoritmo hiperbólico assume o comando dos cálculos com x , em princípio, variando agora de forma crescente de 13 a no máximo x' . Para tanto, é utilizada a $SNPEFP_{11}$. Aqui, também duas condições de interrupção podem ocorrer: x e z inteiros são encontrados ou não. Se forem encontrados deverão ser transferidos para os arquivos provisórios para serem testados quanto à primalidade, voltando os cálculos à rotina do algoritmo circular. Tempo gasto e quantidades de cálculo resultantes devem também ser acumulados nos respectivos arquivos. Quando x e z inteiros não são encontrados o limite de interrupção dos cálculos é quando x crescente for maior ou igual a x' . Repare que a variável x percorre todo o intervalo onde x poderia existir: variou de x_{max} a x' pelo algoritmo circular e de 13 a x' pelo algoritmo hiperbólico. Como x e z inteiros não foram encontrados a conclusão é, neste caso, a de que o número testado é primo. Então, sendo primo ele deve ser armazenado no arquivo permanente. O tempo gasto e a quantidade de cálculos e o tempo processados pelo algoritmo hiperbólico serão armazenados nos respectivos arquivos. Na sequência retorna-se ao início do algoritmo circular (item 4) e prossegue-se testando a primalidade dos inteiros remanescentes até a decomposição total em fatores primos de todos os números inteiros encontrados. Resultados apresentados zeram-se os arquivos e se posiciona para uma nova decomposição.

No próximo artigo apresentaremos o texto intitulado “*Algoritmo Retangular*” de cunho **didático** cuja finalidade é mostrar sua aplicação na resolução de problemas de decomposição de números inteiros ou resolver, sem aplicar a fórmula de **Bashcara** (Matemático nascido em 1114, na Índia e viveu até meados de 1185) equações do 2º grau cujas raízes sejam números inteiros ou decimais, inteiros estes que deverão ser de **pequena monta**. Ele é derivado, como ficará claro no decorrer da exposição, do **algoritmo circular**.

6 Bibliografia

[1] Tufaile Damer - Coletânea de artigos do Blog DNI acesse www.damer.tufaile.nom.br

[2] Sgarro, Andrea – Códigos Secretos – Companhia Melhoramentos 1994. Vide capítulo 14 – Criptografia do futuro – itens: “Divagações sobre números primos” e “Criptografia por chave publica: o cifrário RSA”